Correction Devoir maison n°4

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$. On propose 3 méthodes de calcul de S_n.

1. **Première méthode**
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En utilisant le binôme de Newton,
   $$\begin{aligned}(2k+1)^3 &= (2k)^3 + 3 \times (2k)^2 + 3 \times 2k + 1 \\ &\boxed{= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1}\end{aligned}$$
   (b) On calcule alors
   $$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3 \\ &= \sum_{k=0}^{n} 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ &= 8\sum_{k=0}^{n} k^3 + 12\sum_{k=0}^{n} k^2 + 6\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1) \\ &= (n+1)(2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 2n + 3n + 1) \\ &= (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)\end{aligned}$$
   Or
   $$\begin{aligned}(n+1)(2n^2 + 4n + 1) &= 2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1\end{aligned}$$
   Donc
   $$\boxed{S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1).}$$
2. **Deuxième méthode** Montrer par récurrence $\mathscr{P}_n : \{S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)\}$.
   - **Initialisation :** On a d'une part $S_0 = \sum_{k=0}^{0} (2k+1)^3 = 1$ et $(0+1)^2(2 \times 0^2 + 4 \times 0 + 1) = 1$ donc l'initialisation est vérifié.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors
   $$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)^3 \\ &= S_n + (2(n+1)+1)^3 \\ &= (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1) + (2n+3)^3 \\ &= (n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 4n + 1) + ((2n)^3 + 3 \times (2n)^2 \times 3 + 3 \times (2n) \times 9 + 27) \\ &= 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 \\ &= 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) &= (n^2+4n+4)(2n^2+4n+2+4n+4+1)\\ &= (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7)\\ &= 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28\\ &= 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28\end{aligned}$$

Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)}$.

3. **Troisième méthode** On introduit $T_n = \sum_{k=0}^{n}(2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.

   (a) S_n est la somme des nombres impairs de 0 à $2n+1$. T_n est la somme des nombres pairs de 0 à $2n$. Ainsi

   $$\boxed{S_n + T_n = U_n}$$

   (b) On a

   $$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=0}^{n}(2k)^3\\ &= \sum_{k=0}^{n} 8k^3\\ &= 8\sum_{k=0}^{n} k^3\\ &= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\\ &\boxed{= 2n^2(n+1)^2}\end{aligned}$$

   et

   $$\begin{aligned}U_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} k^3\\ &= \left(\frac{(2n+1)(2n+1+1)}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{2(2n+1)(n+1)}{2}\right)^2\\ &\boxed{= (2n+1)^2(n+1)^2}\end{aligned}$$

   (c) D'après les questions précédentes,

   $$\begin{aligned}S_n &= U_n - T_n\\ &= (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2\\ &= (n+1)^2((2n+1)^2-2n^2)\\ &= (n+1)^2(4n^2+4n+1-2n^2)\\ &\boxed{= (n+1)^2(2n^2+4n+1)}\end{aligned}$$

Exercice 2 - Tournoi de Poker

Vous vous inscrivez à un tournoi de Poker no-limit Texas Hold'em amateur dans lequel 100 joueurs participent dont 25 % de filles. Au début du jeu chaque joueur reçoit le même nombre de jetons. Lorsque l'on n'a plus de jetons, on est éliminé du tournoi. Les meilleurs joueurs reçoivent un lot.

Règles du no-limit Texas Hold'em : Le jeu se joue avec un jeu de 52 cartes (4 couleurs, 13 valeurs) en plusieurs phases :
Préflop : Chaque joueur reçoit 2 cartes faces cachées. → *Tour de mise*
Flop : On met 3 cartes visibles de tous sur le board. → *Tour de mise*
Turn : On rajoute 1 carte visible de tous sur le board. → *Tour de mise*
River : On rajoute 1 carte visible de tous sur le board. → *Tour de mise*

Le but est d'avoir la meilleur combinaison de 5 cartes en prenant les 2 cartes cachées et les 5 cartes visibles sur le board. Voici les différentes combinaisons possibles de la moins forte à la plus forte :

1. **La paire :** Avoir 2 cartes de même valeur (exemple : $A\diamondsuit - A\clubsuit - 4\heartsuit - 6\spadesuit - 2\clubsuit$)
2. **La double paire :** Avoir 2 fois 2 cartes de même valeur (exemple : $A\diamondsuit - A\clubsuit - 2\heartsuit - 6\spadesuit - 2\clubsuit$)
3. **Le brelan :** Avoir 3 cartes de même valeur (exemple : $A\diamondsuit - A\clubsuit - A\heartsuit - 5\spadesuit - 2\clubsuit$)
4. **La suite :** Avoir 5 cartes qui se suivent (exemple : 6♡ - 7♢ - 8♣ - 9♠ - 10♣)
5. **La couleur :** Avoir 5 cartes de la même couleur (exemple : 3♣ - 6♣ - 8♣ - 10♣ - A♣)
6. **Le full :** Avoir en même temps une paire et un brelan (exemple : $A\clubsuit - A\spadesuit - A\heartsuit - 5\spadesuit - 5\heartsuit$)
7. **Le carré :** Avoir 4 cartes de même valeur (exemple : $A\diamondsuit - A\clubsuit - A\heartsuit - A\spadesuit - 2\clubsuit$)
8. **La suite couleur ou quinte flush :** Avoir 5 cartes qui se suivent et de même couleur (par exemple 6♣ - 7♣ - 8♣ - 9♣ - 10♣)

1. **Tirage au sort de la place.** Les joueurs sont répartis sur 10 tables de 10 places. On note traditionnellement la place $t-p$ ou t est le numéro de la table et p le numéro de la place à table. Ainsi se trouver en $1-6$ signifie être à la table n°1, siège n°6. Le tirage au sort de la place se fait de manière équiprobable.
   (a) On tire à la fois la table puis la place. On peut représenter cette expérience à l'aide de couples (t,p) où t est le numéro de la table et p le numéro de la place :
   $$\boxed{\Omega = [\![1,10]\!] \times [\![1,10]\!] = [\![1,10]\!]^2}$$
   La loi de probabilité associée à cet univers est la $\boxed{\text{loi uniforme}}$ car le tirage au sort se fait de manière équiprobable.
   (b) L'évènement A : "Être au siège 1-6" est un évènement élémentaire donc :
   $$\boxed{P(A) = \frac{1}{100}.}$$
   (c) On note B l'évènement "se trouver au siège n°1". Vu qu'il y a un siège n°1 sur les 10 tables, $card(B) = 10$ et donc
   $$\boxed{P(B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}}$$
   (d) Il y a 25 filles mais seulement 10 tables. Il y aura donc forcément au moins une table avec au moins 3 filles à table. Ainsi, si C est l'évènement avoir 3 filles au moins à une même table alors
   $$\boxed{P(C) = 1.}$$

Après tirage au sort, vous êtes à la table n°1, siège n°6.

2. **Répartition des prix.** Seul les 10 premiers joueurs recevront un lot (différent en fonction de leur classement). En admettant que chacun ait autant de chance de gagner, donner

   (a) On note E l'ensemble des joueurs. On tire alors 10 joueurs au hasard avec ordre (les lots sont donnés selon le classement) et sans remise (un joueur ne peut pas finir à deux places différentes. Le nombre de répartition des lots possible est donc un 10-arrangement de E.

   $$\boxed{\text{Il y a donc } A_{10}^{100} = \frac{100!}{90!} = 6.2 \times 10^{19} \text{ répartitions possible.}}$$

   (b) On note A_k les évènements :"Finir à la k-ième place" pour $k \in [\![1, 10]\!]$ et on note l'évènement A :" Avoir un lot". On a donc

   $$A = \bigcup_{k=1}^{10} A_k$$

   Le nombre de répartition possible sachant que l'on finit à la k-ème place est le nombre de 9 arrangements (puisqu'on occupe une place gagnante) de l'ensemble des joueurs restant. Donc $card(A_k) = A_9^{99} = \dfrac{99!}{90!}$. Ainsi

   $$\forall k \in [\![1, 10]\!], \quad P(A_k) = \frac{99!}{90!} \times \frac{90!}{100!} = \frac{1}{100}$$

   Or pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$ $P(A_k)$ est constant. On obtient donc

   $$\boxed{P(A) = 10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}.}$$

   Remarque : On aurait pu obtenir ce résultat sans dénombrer toutes les possibilités de classement.

   (c) On note l'évènement C : "toute la table n° 1 a un lot". On note E_1 l'ensemble des personnes assises initialement à la table n^o 1. On cherche tous les arrangements pour que ces personnes finissent dans les 10 premiers. Il s'agit d'une permutation de l'ensemble E_1 (on classe toutes les personnes de cet ensemble). On a donc

   $$\boxed{P(C) = \frac{10! \times 90!}{100!} = \frac{1}{\binom{100}{10}} = 5,78 \times 10^{-14}}$$

   Remarque : Ce nombre est très petit (1 chance sur 17 billions) et nous avons supposé que chaque joueur avait autant de chance d'avoir un lot. En réalité, les joueurs étant à la même table, ils ont plus de chance de s'éliminer et donc la probabilité réelle devrait être encore plus faible.

   (d) On note l'évènement D : "Au moins une fille a un lot". On considère l'évènement contraire, à savoir $\overline{D}$: "Aucune fille n'a de lot". On note G l'ensemble des garçons. S'il n'y a que des garçons qui ont un lot, il faut compter le nombre d'arrangements de 10 éléments de G. Ainsi,

   $$card(\overline{D}) = A_{10}^{75} = \frac{75!}{65!} \quad \text{et} \quad P(\overline{D}) = \frac{75!}{65!} \times \frac{90!}{100!}.$$

   On a alors $\boxed{P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{75!}{65!} \times \frac{90!}{100!} \approx 0,95.}$

3. **Préflop** Vous recevez deux cartes face cachée (Comme on ne connait pas les cartes des autres joueurs, on considère que ces 2 cartes sont tirés aléatoirement dans le paquet de 52 cartes).Soit E l'ensemble des cartes ($\#E = 52$). L'ensemble des résultats possibles Ω est l'ensemble des parties de E à deux éléments. Donc
$$card(\Omega) = \binom{52}{2} = \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51$$
   (a) On note l'évènement A : "avoir $A\heartsuit A\spadesuit$". Comme on ne considère pas d'ordre dans cette modélisation,
$$card(A) = 1$$
   Ainsi,
$$\boxed{P(A) = \frac{1}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{26 \times 51} \approx 0.00075}$$
   (b) On note B l'évènement "avoir une paire d'As". Soit E_1 l'ensemble des As (avec $\#E_1 = 4$). B est l'ensemble des parties de E_1 à 2 éléments. On a donc $card(B) = \binom{4}{2} = 6$. Ainsi,
$$\boxed{P(A) = \frac{6}{\binom{52}{2}} = \frac{6}{26 \times 51} = \frac{1}{13 \times 17} \approx 0,0045}$$
   (c) On note B_k l'évènement "obtenir une paire de hauteur k (où l'on considère que les valets, dames, rois, ont respectivement pour hauteur 11, 12 et 13). Ainsi
$$B = \bigcup_{k=1}^{1} 3B_k$$
   Les ensembles $(B_1, \dots B_{13})$ sont deux à deux disjoints et pour tout $k \in [\![1, 13]\!]$, $P(B_k) = P(A)$ Donc
$$\boxed{P(B) = \sum_{k=1}^{13} P(B_k) = 13 \times \frac{1}{13 \times 17} = \frac{1}{17} \approx 0,059}$$
   (d) On note D l'évènement "avoir 2 cartes de la même couleur" . On a
$$D = D_\heartsuit \cup D_\diamondsuit \cup D_\clubsuit \cup D_\spadesuit$$
   où D_c est l'évènement "avoir 2 cartes de la couleur correspondante". Comme les 4 probabilités seront les mêmes, on calcule la probabilité de $D_\heartsuit$: "Obtenir 2 cartes de cœurs". On cherche le nombre de partie de 2 éléments de l'ensemble des cœurs. On a alors $card(D_\heartsuit) = \binom{13}{2}$ et donc
$$P(D_\heartsuit) = \frac{\binom{13}{2}}{26 \times 51} = \frac{13 \times 12}{2 \times 26 \times 51} = \frac{1}{17}.$$
   Et donc
$$\boxed{P(D) = \frac{4}{17} \approx 0.24.}$$

   On reçoit $A\heartsuit Q\heartsuit$ (As et Dame de coeur).

4. **Flop** On tire les 3 cartes du flop visibles de tous (Attention, dans cette partie on sait qu'on ne peut pas tirer l'As de coeur ou la dame de coeur puisqu'on les a en main). On note E l'ensemble des 50 cartes restantes. L'ensemble des flops possibles Ω est l'ensemble des parties de E à 3 éléments. On a donc
$$card(\Omega) = \binom{50}{3} = \frac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2} = 50 \times 49 \times 8$$

(a) On note A l'évènement "Obtenir 3 cartes de cœurs au flop". A est l'ensemble des parties de l'ensemble $E_\heartsuit$ des cœurs restant ($\#E_\heartsuit = 11$). Ainsi

$$card(A) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3$$

Enfin

$$\boxed{P(A) = \frac{\binom{11}{3}}{\binom{50}{3}} = \frac{11 \times 5 \times 3}{50 \times 49 \times 8} = \frac{33}{10 \times 49 \times 8} = \frac{33}{3920} \approx 0.0084}$$

(b) On note B l'évènement "Tirer 2 cartes de cœurs et une qui ne soit pas de cœur". Ainsi,

$$card(B) = \binom{11}{2}\binom{39}{1}$$

et donc

$$\boxed{P(B) = \frac{\binom{11}{2}\binom{39}{1}}{\binom{50}{3}} = \frac{11 \times 10 \times 39}{50 \times 49 \times 8 \times 2} = \frac{429}{3920} \approx 0,11}$$

(c) Pour obtenir un carré, il faut obtenir les 3 as restant ou les 3 dames restantes. On note C : "Obtenir un carré". On note A : "Obtenir les 3 As" et D : "Obtenir les 3 dames". On a

$$card(A) = card(D) = 1$$

Ainsi

$$\boxed{P(C) = \frac{2}{\binom{50}{3}} = \frac{2}{50 \times 49 \times 8} = \frac{1}{50 \times 49 \times 4} \approx 0.00010.}$$

(d) On note D :"obtenir un full dès le flop". Pour obtenir un full, il faut que l'évènement D_1 : "Obtenir 2 as et 1 dame" ou D_2 : "Obtenir 2 dames et 1 as". Dans les deux cas

$$card(D_1) = card(D_2) = \binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$$

Donc

$$P(D_1) = P(D_2) = \frac{9}{\binom{50}{3}} = \frac{9}{50 \times 49 \times 8}$$

et

$$\boxed{P(D) = P(D_1) + P(D_2) = \frac{9}{50 \times 49 \times 4} = \frac{9}{9800} \approx 0.00092}$$

Le flop tombe : $J\heartsuit - 2\spadesuit - 7\clubsuit$ (Valet de coeur, 2 de pique et 7 de trèfle) - Il reste donc 47 cartes dans le paquet. Nous n'avons aucune combinaison.

5. **Turn** On tirera une nouvelle carte visible de tous.

(a) On note A l'évènement obtenir une paire sur le turn. Il reste 47 cartes en tout dans le paquet (donc $\#\Omega = 47$) et il reste 3 As, 3 Dames, 3 Valets, 3 sept, 3 deux soit 15 cartes qui nous intéresse. Donc

$$\boxed{P(A) = \frac{5 \times 3}{47} = \frac{15}{47} \approx 0.32}$$

(b) On note B l'évènement "obtenir une couleur sur le turn" Comme nous disposons pour le moment de seulement 3 cartes de cœurs, il est impossible d'obtenir une couleur avec seulement une carte. Donc

$$\boxed{P(B) = 0.}$$

(c) Pour obtenir une couleur en comptant la turn et la river, il faut obtenir un cœur sur le turn et sur la river. On note C l'évènement "On obtient une couleur à l'issue de la river" et les évènements C_1 "On tire un cœur sur le turn", C_2 "On tire un cœur sur la river". Ainsi $C = C_1 \cap C_2$. Les évènements C_1 et C_2 ne sont pas indépendants (pas de remise de cartes).

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C_1 \cap C_2) \\ &= P(C_1) P_{C_1}(C_2) \\ &= \frac{10}{47} \times \frac{9}{46} \\ &= \frac{45}{47 \times 23} \\ &\boxed{= \frac{45}{1081} \approx 0.042} \end{aligned}$$

Remarque : On aurait également pu considérer des arrangements.

La turn est un : 10♡. Nous n'avons toujours pas de combinaison mais nous avons plusieurs possibilités selon la river

6. **River** On tire la dernière carte visible de tous.

(a) On note :
A : "Paire d'As ou de dames". $Card(A) = 6$ (3 as et 3 dames)
B : "Obtenir une couleur" . $Card(B) = 9$ (9 cartes de cœurs)
C : "Obtenir une suite" . $Card(B) = 4$ (4 Rois)
D : "Obtenir une suite couleur" . $Card(D) = 1$ (Obtenir le roi de cœurs)

(b) Il ne reste plus que 46 cartes dans le paquet à tirer (ainsi $\#\Omega = 46$). Donc

$$\boxed{P(A) = \frac{6}{46} \approx 0.13, \quad P(B) = \frac{9}{46} \approx 0.20}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{4}{46} \approx 0.08, \quad P(D) = \frac{1}{46} \approx 0.02}$$

Remarque : Une règle du poker dit que pour connaitre la probabilité qu'une combinaison que l'on souhaite arrive sur la river, il suffit de compter le nombre de cartes qui nous intéresse et le multiplier par 0,02. On observe que cette approximation est correcte lorsque les cartes qui nous intéressent ne sont pas trop nombreuses.